

I حركة قذيفة في مجال الثقالة المنتظم

1– المعادلة التفاضلية:

نرسل قذيفة كتلتها m من موضع M_0 بسرعة بدئية $\vec{V_0}$، بحيث $\vec{V_0}$ توجد في المستوى الرأسي وتُكون الزاوية α مع الخط الأفقي.

بإهمال تأثير الهواء، تخضع القذيفة لتأثير وزنها فقط $\vec{P} = m\vec{g}$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القذيفة في معلم أرضي نعتبره غاليلياً نكتب:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{P} = m.\vec{a}_G$$

ومنه:

$$\vec{a}_G = \vec{g}$$

وبما أن : $\vec{a}_G = \dfrac{d\vec{V}_G}{dt}$ فإن:

$$\frac{d\vec{V}_G}{dt} = \vec{g}$$

وهي المعادلة التفاضلية التي تحققها متجهة السرعة $\vec{V}_G$

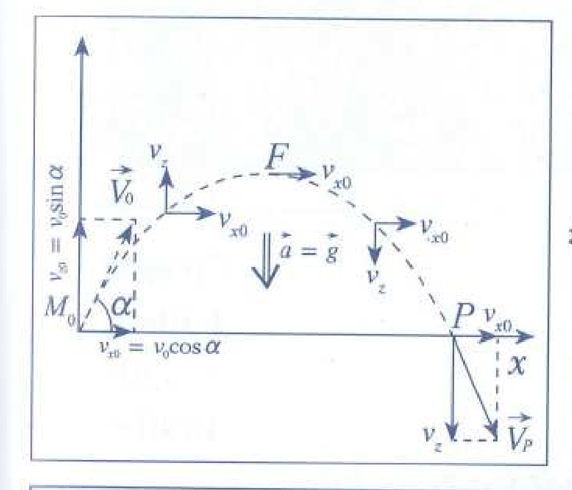
بإسقاط هذه العلاقة $\vec{a}_G = \vec{g}$ في المَعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا:

$$\begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{cases}$$

2– متجهة السرعة:

نستنتج من إحداثيات $\vec{a}$ أن:

$$\begin{cases} V_x = C_1 \\ V_y = C_2 \\ V_z = -gt + C_3 \end{cases}$$



وبالرجوع إلى إحداثيات السرعة البدئية نستنتج أن معادلات السرعة تكتب عند لحظة t كالتالي:

$$\begin{cases} V_x = V_{0x} = V_0 . \cos\alpha \\ V_y = V_{0y} = 0 \\ V_z = -gt + V_{0z} = -gt + V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

ملحوظة:

– الحركة مستقيمية منتظمة على المحور ox، وسرعتها ثابتة تساوي $V_0 . \cos\alpha$

– وعلى المحور oz الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام، تسارعها يساوي $a_z = -g$، وهي:

- متباطئة خلال الصعود (بين O و F) لأن $\vec{V_z}.\vec{g} < 0$
- متسارعة خلال النزول (بعد F) لأن $\vec{V_z}.\vec{g} > 0$



3– المعادلات الزمنية ومعادلة المسار:

تكتب الدوال الأصلية لمعادلات السرعة كمايلي:

$$\begin{cases} x = V_0.\cos\alpha.t + x_0 \\ y = C = y_0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0\sin\alpha.t + z_0 \end{cases}$$

باعتبار أنه عند $t=0$ توجد القذيفة عند الموضع M_0

بحيث $x_0=y_0=z_0$

نستنتج أن:

يتبين من خلال المعادلات الزمنية أن:

• $y=0$ أيا كانت قيمة t الحركة. إذن حركة مستوية وتتم في المستوى xoz.

نكتب معادلة المسار كالتالي:

$$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_0.\cos\alpha}\right)^2 + V_0.\sin\alpha\left(\frac{x}{V_0.\cos\alpha}\right)$$

$$z = -\frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}.x^2 + \tan\alpha.x$$

وهي معادلة جزء من شلجم يوجد في المستوى الرأسي xoz.

4– بعض خاصيات الحركة الشلجمية:

من أهم نقط المسار النقطتان F و P:

F تسمى قمة المسار و OP تسمى مدى القذيفة

1.4– قمة المسار *F Sommet de la trajectoire*:

عندما تصل القذيفة إلى قمة المسار F يصير المماس للمسار أفقياً وتكون حينئذ متجهة السرعة $\vec{V_F}$ أفقية.

ومنه $V_{Fy}=0$، وبالتالي:

$$V_y = -gt + V_0\sin\alpha = 0$$

إذن:

$$t_F = \frac{V_0\sin\alpha}{g}$$

إحداثيات F:

$$x_F = V_0\cos\alpha.t_F$$

$$= V_0\cos\alpha.\frac{V_0\sin\alpha}{2g}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$x_F = \frac{V_0^2}{2g}\sin 2\alpha$$

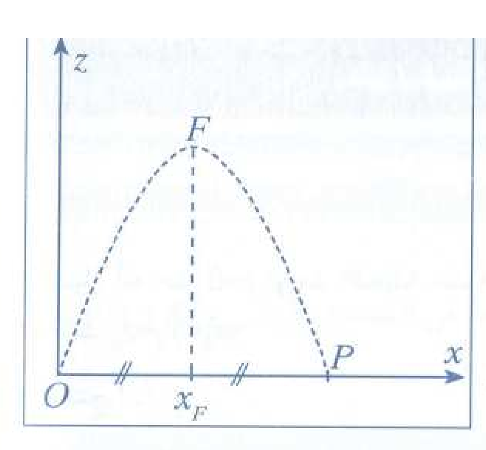
$$z_F = -\frac{1}{2}g.t_F^2 + V_0\sin\alpha.t_F$$

$$= -\frac{g}{2}.\frac{V_0^2\sin^2\alpha}{g^2} + \frac{V_0\sin\alpha.V_0\sin\alpha}{g}$$

$$= \frac{V_0^2\sin^2\alpha}{g}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{V_0^2\sin^2\alpha}{g}$$

$$z_F = \frac{V_0^2.\sin^2\alpha}{g}$$





2.4– مدى القذيفة *La portée du projectile*:

نسمي مدى القذيفة المسافة الأفقية القصوى OP التي تقطعها القذيفة: $OP=x_{max}$

$$OP = 2.x_F = 2.\frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

المدى القصوي:

للحصول على أكبر مدى ممكن OP_{max} بالنسبة لقذيفة ذات سرعة بدئية V_0 معينة يجب اختيار الزاوية α، بحيث:

يكون المقدار $\sin 2\alpha$ قصويا يعني:

$$\sin 2\alpha = 1$$
$$2\alpha = \frac{\pi}{2}$$
$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

تطبيق

تتميز حركة مركز قصور قذيفة بالمعادلات التالية (في النظام العالمي للوحدات):

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -5t^2 + 4,6t + 0,5 \end{cases}$$

1– حدد الشروط البدئية لهذه الحركة.

2– استنتج السرعة البدئية V_0 والزاوية α التي تكونها المتجهة $\vec{V_0}$ مع المحور ox.

3– بين أن الحركة مستوية واكتب معادلة مسارها.

4– عند أي لحظة t_F تصير المتجهة $\vec{V}$ للسرعة أفقية؟

5– استنتج إحداثيات النقطة F قمة المسار.

الحـل

1– الشروط البدئية للحركة:

تمثل هذه الشروط موضع وسرعة مركز قصور المتحرك عند اللحظة $t=0$

باعتبار $t=0$ نجد:

$$\overrightarrow{OM_0}\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0,5m \end{cases}$$

وباشتقاق المعادلات الزمنية بدلالة الزمن نجد:

$$\vec{V}\begin{cases} V_x = \dot{x} = 2 \\ V_y = \dot{y} = 0 \\ V_z = \dot{z} = -10t + 4,6 \end{cases}$$

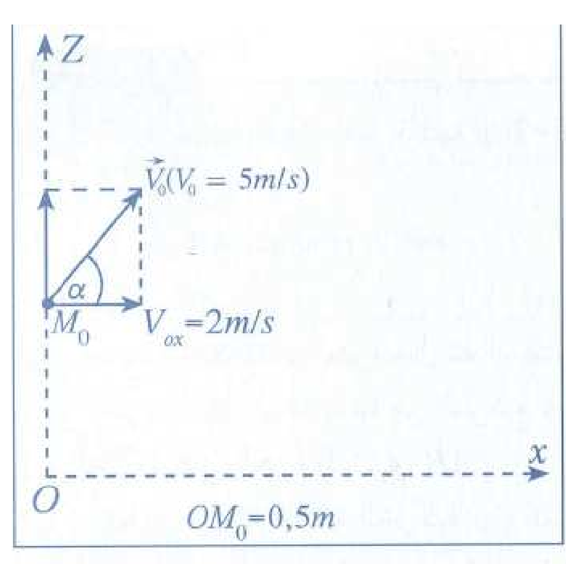
عند $t=0$:

$$\vec{V_0}\begin{cases} V_{ox} = 2 \\ V_{oy} = 0 \\ V_{oz} = 4,6 \end{cases}$$

2– استنتاج V_0 و α:

$$V_0 = \sqrt{2^2 + 4,6^2} \simeq 5m/s$$





من الشكل جانبه لدينا: $\cos\alpha = \frac{V_{ox}}{V_0} = \frac{2}{5} = 0,4$

$\alpha \approx 66°$

3- مسار الحركة:

نلاحظ أن الإحداثيات التي تتغير خلال الحركة هي x وz، بينما y فإنه يبقى منعدماً أيا كانت قيمة الزمن t.

إذن: الحركة تتم على المستوى المكون من المحورين ox وoz، وهي بالتالي حركة مستوية.

من المعادلة الأولى لدينا: $t = \frac{x}{2}$

وبالتعويض في معادلة z نكتب:

$$Z = -5\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4,6\left(\frac{x}{2}\right) + 0,5$$

$$Z = \frac{-5}{4}x^2 + 2,3x + 0,5$$

4- اللحظة t_F:

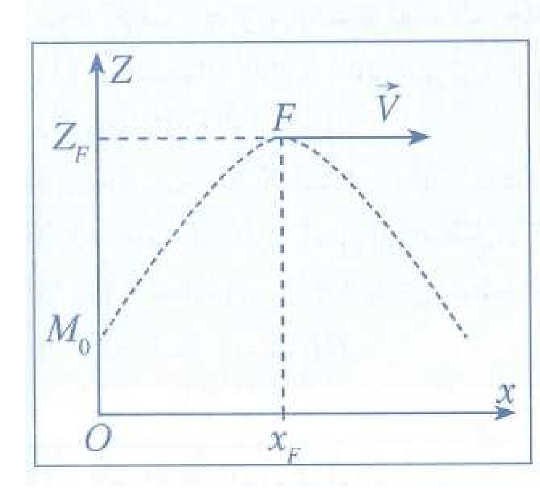
عندما تصبح $\vec{V}$ أفقية فإن مركبتها الرأسية V_Z تصير منعدمة.

وعلماً أن: $V_Z=-10t+4,6$

نستنتج أن: $0=-10.t_F+4,6$

ومنه: $t_F=0,46s$

5- إحداثيات F:



نعلم أن المتجهة $\vec{V}$ مماسة للمسار، وعندما تصير $\vec{V}$ أفقية فإن المماس للمسار الشلجمي يصير أفقيا. ويتم ذلك عند قمة الشلجم F، حيث يمكن استعمال المعادلات الزمنية:

$x_F=2t_F=2.0,46$

$x_F=0,92m$

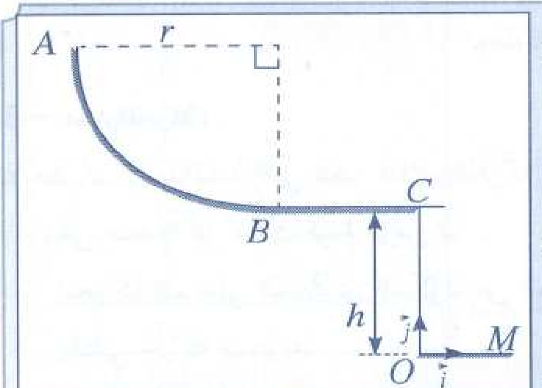
$Z_F = -5t_F^2 + 4,6.t_F + 0,5$

نجد: $Z_F \approx 1,56m$



تمارين توليفية وحلولها

تمرين 1



تتحرك كرية نمثلها بنقطة مادية كتلتها $m=20g$ على مسار ABC يتكون من جزئين:

- جزء دائري AB شعاعه $r=80cm$
- جزء أفقي BC

نهمل جميع الاحتكاكات ونعتبر مجال الثقالة ثابتا وشدته $g=10m.s^{-2}$

نرسل الكرية بدون سرعة بدئية من الموضع A.

1- الحركة على الجزء الدائري AB:

1.1- بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية بين أن تعبير سرعة الكرية لحظة مرورها من الموضع B هو $V_B=\sqrt{2g.r}$ احسب V_B.

2.1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، بين أن تعبير شدة القوة $\vec{R}$ المقرونة بتأثير السطح الدائري AB على الكرية عند الموضع B هو $R_B=3mg$. قارن شدة هذه القوة مع وزن الكرية.

2- الحركة على السطح الجزئي BC:

باستعمال القانون الثاني لنيوتن حدد:

1.2- تسارع الحركة خلال هذه المرحلة ثم استنتج سرعتها عند النقطة C.

2.2- احسب شدة القوة $\vec{R}$ على هذا الجزء.

3- دراسة السقوط الحر:

تغادر الكرية السطح الأفقي عند مرورها من النقطة C، لتسقط في مجال الثقالة وتصل بعد ذلك إلى سطح الأرض الذي يبعد عن C بالارتفاع $h=80cm$.

نتخذ كأصل للتواريخ بالنسبة لهذه المرحلة لحظة مرور الكرية من الموضع C.

1.3- باستعمال القانون الثاني لنيوتن، أوجد في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المعادلتين الزمنيتين $x=f(t)$ و $y=g(t)$ لحركة الكرية خلال هذه المرحلة.

2.3- استنتج معادلة المسار. ماذا طبيعته؟

3.3- علما أن الكرية تصل إلى سطح الأرض عند النقطة M حدد:

1.3.3- لحظة وصول الكرية إلى سطح الأرض.

2.3.3- قيمة المسافة OM.

الحل

1- الحركة على الجزء الدائري:

1.1- تعبير السرعة V_B:

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على الكرية بين الموضعين A و B فنكتب:

$$E_{C_B}-E_{C_A}=\underset{A\to B}{W}(\vec{P})+\underset{A\to B}{W}(\vec{R})$$

لدينا $E_{C_A}=0$ لأن $V_A=0$

في غياب الاحتكاك تكون القوة $\vec{R}$ عمودية على المسار عند كل موضع، شغلها الجزئي يكون إذن منعدما.

وبالتالي: $\underset{A\to B}{W}(\vec{R})=0$

$$W(\vec{P})=mgh=mgr$$

إذن:

$$E_{C_B}-0=mgh=mgr$$

$$\frac{1}{2}mV_B^2=mgr$$

$$V_B=\sqrt{2gr}=\sqrt{2.10.0,8}=4m.s^{-1}$$

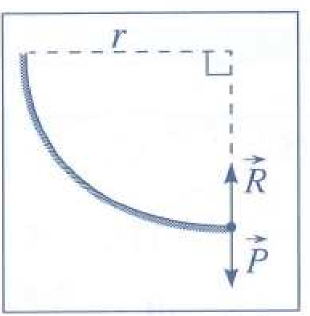
2.1- تعبير الشدة R_B:

لدينا حسب القانون الثاني لنيوتن في معلم أرضي نعتبره غاليليا:

$$\vec{P}+\vec{R}=m.\vec{a}_G=m\vec{a}$$

نسقط هذه العلاقة على المنظمي المركزي فنكتب:





للمسار عند B : $-P + R_B = m(a_N)_B = m.\frac{V_B^2}{r}$

$R_B = P + \frac{m}{r}.V_B^2$

باستعمال تعبير V_B: $R_B = mg + \frac{m}{r}.2gr = 3mg$

نلاحظ أن $R_B=3P$ أي أنها أكبر ثلاث مرات من وزن الكرية.

2- الحركة على الجزء الأفقي BC:

1.2- السرعة V_B:

لدينا حسب القانون الثاني لنيوتن: $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a_G}$

بما أن الحركة تتم على المستقيم الأفقي $\overrightarrow{BC}$ فإن إسقاط هذه العلاقة على المحور $\overrightarrow{Bx}$ يعطي:

$0 + 0 = m.a_x \Rightarrow a_x = 0$

منه: $V_x=cte=V$

ولدينا حسب الشروط البدئية فإن: $V=V_B=4m/s$

فالحركة مستقيمية منتظمة سرعتها: $V=4m/s$

إذن: $V_C=4m/s$

2.2- شدة قوة السطح:

بإسقاط على العلاقة السابقة على المحور الرأسي الموجه نحو الأعلى:

$\vec{a}\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$

$-P+R=m.a_y=0$

$R=P=mg=20.10^{-3}.10=0,2N$

3- دراسة السقوط الحر:

1.3- المعادلتان الزمنيتان:

تخضع الكرية بعد مغادرة السطح BC لتأثير وزنها فقط.

لدينا حسب القانون الثاني لنيوتن:

$\sum\vec{F} = \vec{P} = m\vec{a_G}$

نضع $\vec{a_G} = \vec{a}$: $m\vec{g} = m\vec{a}$

$\vec{a} = \vec{g}$

باستعمال المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$: $\vec{a}\begin{cases}a_x = g_x = 0\\a_y = g_y = -g\end{cases}$

إحداثيات $\vec{V}$ الدالة الأصلية للتسارع تكون إذن هي:

$\vec{V}\begin{vmatrix}V_x = C_1\\V_y = -gt + C_2\end{vmatrix}$

وباستعمال الشروط البدئية حيث لدينا:

$\vec{V}_{(t=0)} = \vec{V_C}\begin{vmatrix}V_C\\0\end{vmatrix}$

نستنتج أن: $C_1=V_C$

$C_2=0$

وبالتالي: $\vec{V}\begin{vmatrix}V_x = V_C\\V_y = -gt\end{vmatrix}$

نستنتج المعادلتان الزمنيتان فنكتب:

$\begin{cases}x = V_C.t + C_1'\\y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_2'\end{cases}$

نماثل هذه النتيجة عند $t=0$ مع موضع الكرية عند النقطة C حيث: $\overrightarrow{OC}\begin{vmatrix}0\\h\end{vmatrix}$

إذن: $C_1' = 0$ و $C_2' = h$

وهكذا يكون لدينا:

$\begin{cases}x = V_C.t & (1)\\y = -\frac{1}{2}gt^2 + h & (2)\end{cases}$

2.3- معادلة المسار:

من (1): $t = \frac{x}{V_C}$ إذن: $y = -\frac{g}{2V_C^2}.x^2 + h$

المسار شلجم في المستوى الرأسي Oxy

1.3.3- حساب اللحظة t_M:

إحداثيات M $\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix}0\\x_M = OM\end{vmatrix}$

باستعمال المعادلة $y=f(t)$: $y_M = -\frac{1}{2}gt_M^2 + h$

$0 = -\frac{1}{2}gt_M^2 + h \Rightarrow t_M = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

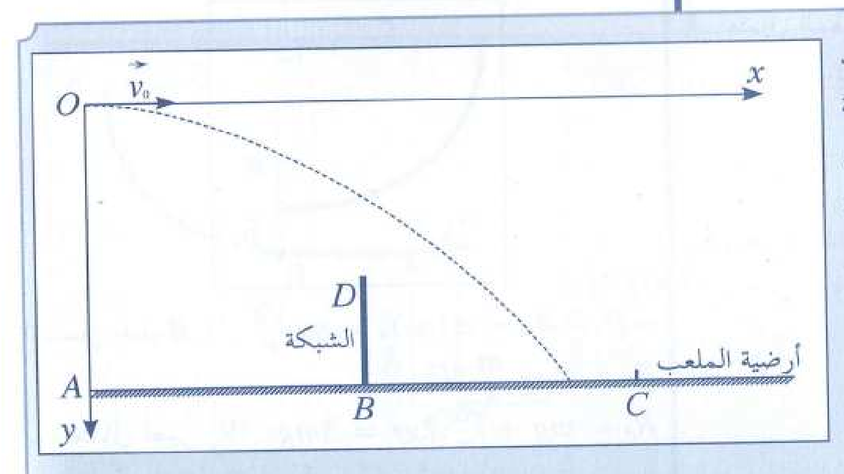
$t_M = \sqrt{\frac{2.0,8}{10}} = 0,4s$

2.3.3- تحديد المسافة OM:

$OM=x_M=V_C.t_M$

$OM=2.0,4=0,8m$

تمرين 2



خلال مباراة في كرة المضرب، أرسل أحد اللاعبين الكرة من منطقة (AB) إلى منطقة الخصم بسرعة بدئية متجهتها $\vec{v}_0$ أفقية، انطلاقا من نقطة O تبعد عن الأرض ب:

$OA=h=2m$

(انظر الشكل جانبه).

نعتبر الكرة شبيهة بنقطة مادية.

نعطي: $g=10m.s^{-2}$ ؛ $BD=1m$ ؛ $AB=BC=12m$

1- بإهمال الاحتكاكات، بين أن معادلة مسار مركز قصور الكرة في المستوى oxy هي: $y=\frac{g}{2v_0^2}x^2$

2- احسب القيمة الدنوية للسرعة البدئية $v_0(min)$ لتسقط الكرة في منطقة الخصم (BC)

3- احسب القيمة القصوية $v_0(max)$ للسرعة البدئية لكي لا تسقط الكرة خارج المنطقة (BC)

استنتج قيمة السرعة V_2 للكرة عند اصطدامها بالأرض في النقطة C.

4- في الحقيقة تسقط الكرة قبل النقطة C بقليل (بين B و C) بسرعة $v_0=38m/s$

احسب شغل قوة الاحتكاك الناتجة عن وجود الهواء. نعطي كتلة الكرة $m=100g$

الحل

1- معادلة المسار:

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\Sigma\vec{F}_{ext}=m.\vec{a}_G$$

$$\vec{P}=m\vec{g}=m.\vec{a}_G \Rightarrow \vec{a}_G=\vec{g}$$

بإسقاط هذه العلاقة نجد:

على ox: $\vec{a}\begin{cases}a_x=g_x=0\\ a_y=g_y=g\end{cases}$:على oy

نستنتج من ذلك وباستعمال الشروط البدئية حيث أن: $\vec{v}_0\begin{cases}v_0\\0\end{cases}$

$$\vec{v}\begin{cases}v_x=cte=v_0\\ v_y=gt+cte=gt\end{cases}$$

$$\vec{O}\begin{cases}x=v_0t+C=v_0t+x_0=v_0t & (1)\\ y=\frac{1}{2}gt^2+y_0=\frac{1}{2}gt^2 & (2)\end{cases}$$

نعوض $t=\frac{x}{v_0}$ في المعادلة (2):

$$y=\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2=\frac{g}{2v_0^2}.x^2$$

2- تحديد السرعة الدنوية:

لكي تسقط الكرة في منطقة الخصم يجب أولا أن يتحقق الشرط التالي: $y\leq HD=h-BD$

أكبر قيمة ل y تطابق مرور الكرة من D.

يعني: $y_D=y_{max}=h-BD$

$y_{max}=h-BD$

تحقق النقطة D في هذه الحالة معادلة المسار

ومن معادلة المسار $y=\frac{g.x^2}{2v_0^2}$ يتبين أن y تتناسب عكسيا مع v_0 أي أن y_{max} يوافقه v_{0min}.

$$y_{max}=\frac{g}{2v_{0min}^2}.x_D^2=h-BD$$



$$v_{0min}^2 = \frac{g.AB^2}{2(h-BD)}$$

$$v_{0min} = \sqrt{\frac{g.AB^2}{2(h-BD)}} = AB\sqrt{\frac{g}{2(h-BD)}}$$

$$v_{0min} = 12\sqrt{\frac{10}{2(2-1)}}$$

$$v_{0min}=26,23m.s^{-1}$$

3- تحديد v_{0max}:

لكي لا تخرج الكرة من الملعب يتحقق الشرط:

$$x \leq x_C = AC$$

x أفصول النقطة التي تصل فيها الكرة إلى أرضية الملعب والتي أرتوبها هو $y=h$

$$h = \frac{g.x^2}{2v_0^2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2hv_0^2}{g}}$$

يكتب الشرط السابق كالتالي:

$$x = \sqrt{\frac{2hv_0^2}{g}} \leq x_C = AC$$

يعني:

$$\frac{2h.v_0^2}{g} \leq AC^2$$

$$v_0 \leq AC\sqrt{\frac{g}{2h}} = v_{0max}$$

$$v_{0max} = AC\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

$$v_{0max} = 24\sqrt{\frac{10}{4}} = 37,94m.s^{-1}$$

استنتاج v_2 سرعة الكرة عند وصولها إلى C

نستعمل مبرهنة الطاقة الحركية بين O وC:

$$\Delta E_C = W(\vec{P})$$

$$\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_{0max}^2) = mgh \Rightarrow v_2^2 = v_{0max}^2 + 2gh$$

$$v_2 = \sqrt{v_{0max}^2 + 2gh}$$

$$v_2 = \sqrt{(37,94)^2 + 2.10.2} = 38,46m.s^{-1}$$

4- شغل قوة الاحتكاك:

رغم إرسالها بالسرعة البدئية القصوية v_{0max} لم تصل الكرة إلى C، بل سقطت قبلها بقليل، عند النقطة C' بسرعة $v'=38m.s^{-1}$

باستعمال نفس الطريقة السابقة:

$$\Delta E_C = W(\vec{P}) + W(\vec{f})$$

$$\frac{1}{2}m(v'^2 - v_{0max}^2) = mgh + W(\vec{f})$$

$$W(\vec{f}) = m\left[\frac{v'^2 - v_{0max}^2}{2} - gh\right]$$

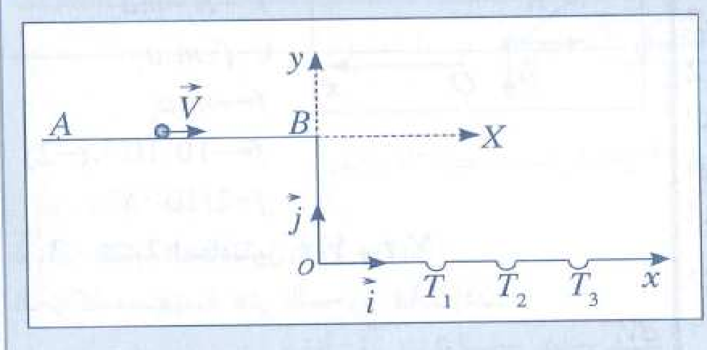
$$W(\vec{f}) = 0,1\left[\frac{38^2 - (37,94)^2}{2} - 10.2\right]$$

$$W(\vec{f}) = -1,77J$$

تمرين 3

نرسل عند لحظة نتخذها كأصل للتواريخ ($t=0$)، من نقطة A؛ كرية نمثلها بنقطة مادية، بسرعة $V_A=6m/s$ فتتحرك على المستقيم الأفقي AB حيث يكون تسارعها ثابت $\vec{a}$ وقيمته هي: $a_X=-2m.s^{-2}$

عند وصولها إلى النقطة B، تغادر الكرية السطح الأفقي لتأخذ حركة سقوط حر وتصل إلى إحدى الحفر T_2 T_1 أو T_3 (أنظر الشكل).



نعطي: $AB=2,75m$، $OB=5m$

$OT_1=25cm$ و $OT_2=50cm$ و $OT_3=75cm$

كتلة الكرية $m=10g$ وشدة الثقالة $g=10m/s^2$

1- حركة الكرية على المستوى الأفقي AB:

1.1- ما طبيعة الكرية على الجزء الأفقي AB؟ علل جوابك.

2.1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن. أحسب f شدة قوة الاحتكاك التي نعتبرها ثابتة خلال الحركة.

3.1- اكتب المعادلتين $V=f(t)$ و $X=f(t)$ مستعملا المعلم AX.

4.1- بين أن سرعة الكرية عند الموضع B هي $V_B=5m/s$.



2– السقوط الحر للكرية:

نتخذ كأصل للتواريخ خلال هذه المرحلة، لحظة مرور الكرية من الموضع B.

1.2– أوجد باستعمال القانون الثاني لنيوتن، المعادلتين الزمنيتين $x=x(t)$ و$y=y(t)$ لحركة الكرية في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2.2– استنتج معادلة مسار هذه الحركة.

3.2– حدد معللا جوابك، الحفرة التي تسقط فيها الكرية.

الحل

1– حركة الكرية على السطح الأفقي:

1.1– طبيعة الحركة:

الحركة مستقيمية متباطئة بانتظام لأن:

– مسارها مستقيمي

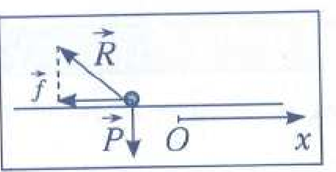
– تسارعها ثابت ومعاكس لمنحى الحركة الموافق لمنحى المحور Ox

2.1– حساب الشدة f:

جرد القوى المطبقة على الكرية على الجزء AB: $\vec{P}$ وزنها و$\vec{R}$ القوة المقرونة بتأثير السطح AB

نطبق القانون الثاني لنيوتن في معلم أرضي نعتبره غاليليا ونكتب:

$\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}$



باستعمال المحور Ox:

$P_x+R_x=ma_x$

$0-f=m.a_x$

$f=-m.a_x$

$f=-10.10^{-3}.(-2)$

$f=2.10^{-2}N$

3.1– كتابة المعادلتين $V(t)$ و$X(t)$:

الحركة مستقيمية على المحور Ax. إذن:

$\frac{dV_x}{dt}=a_x=-2$

ومنه: $V=V_x=-2t+V_0$

ولدينا: $V_0=V_A$

إذن: $(1)\ V=-2t+6$

ومن العلاقة: $V=\frac{dX}{dt}$

نستنتج: $X=-t^2+6t+X_0$

حيث: $X_0=X_A=0$

إذن: $(2)\ X=-t^2+6t$

4.1– استنتاج V_B:

عند النقطة B لدينا حسب المعادلتين (1) و(2)

$V_B=-2t_B+6 \Rightarrow t_B=\frac{6-V_B}{2}=3-\frac{V_B}{2}$

و $X_B=AB=-t_B^2+6.t_B$

إذن: $AB=-\left(3-\frac{V_B}{2}\right)^2+6.\left(3-\frac{V_B}{2}\right)$

$AB=-\left(9+\frac{V_B^2}{2}-3V_B\right)+18-3V_B$

$AB=9-\frac{V_B^2}{4}$

$V_B^2=4(9-AB)$

$V_B=2\sqrt{9-AB}$

$V_B=2\sqrt{9-2,75}$

$V_B=5m.s^{-1}$

2– السقوط الحر للكرية:

1.2– المعادلتان $x(t)$ و$y(t)$:

لدينا حركة سقوط حر، نكتب إذن حسب القانون الثاني لنيوتن:

$\vec{P}=m\vec{a}_G$

أي: $m\vec{a}_G=m\vec{g}$

ومنه: $\vec{a}_G=\vec{g}$

باستعمال المحور Ox:

$a_x=g_x=0 \Rightarrow V_x=cte=V_B$

$x=V_B.t+x_0=V_B.t$

وباستعمال المحور Oy: $a_y=g_y=-g$

$V_y=-gt+\underbrace{V_{0y}}_{=0}=-gt$

$y=-\frac{1}{2}gt^2+\underbrace{V_0}_{=0}$

2.2– معادلة المسار:

لدينا: $\begin{cases} x=V_B.t \\ y=-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$



إذن: $y=-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_B}\right)^2=\frac{-g}{2V_B^2}x^2$

ت.ع: $y=-\frac{10}{2.25}=0,2x^2$

3.2- تحديد الحفرة:

- تتميز الحفر الثلاث بنفس الأرتوب $y_T=-5cm$
- الحفرة التي تسقط فيها الكرية هي التي تحقق معادلة مسار الكرية، يعني: $y_T=-0,2.x^2$

ومنه نستنتج x أفصول الحفرة التي تسقط فيها الكرية:

$$x=\sqrt{\frac{y_T}{-0,2}}$$

$$x=\sqrt{\frac{-5.10^{-2}}{-0,2}}=\sqrt{25.10^{-2}}$$

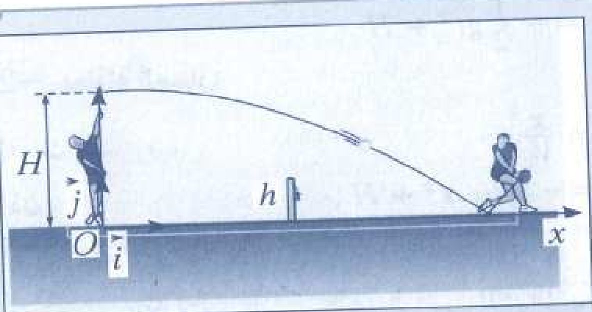
$$x=5.10^{-1}m=50cm$$

وهذه النتيجة توافق الحفرة (T_2).



تمرين 4

أرسل لاعب كرة مضرب الكرة بسرعة أفقية بالنسبة لأرضية الملعب منظمها: $V_0=20m/s$ ومن علو $H=2,4m$



1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، أوجد في غياب الاحتكاكات، المعادلة التفاضلية التي تحققها متجهة السرعة $\vec{V_G}$.

استنتج المعادلات الزمنية لحركة الكرة في المعلم (O,x,z) المرتبط بموضع الإرسال.

نعتبر لحظة إرسال الكرة أصلاً للتواريخ، ونمثل الكرة بنقطة مادية

2- اكتب معادلة مسار هذه الحركة.

3- هل تصطدم الكرة مع الشباك الذي يبلغ علوه $h=90cm$ انطلاقاً من سطح الملعب ويبعد بالمسافة $d=12m$ من اللاعب لحظة الإرسال؟

4- عبر بدلالة d و g و H و h عن السرعة الدنوية V_{0min} لكي يكون الإرسال صائباً. احسب قيمتها نعطي $g=9,8m.s^{-2}$

الحل

1- المعادلات الزمنية:

حسب القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum\vec{F}_{ext}=m\vec{a}_G$$

$$m\vec{g}=m\vec{a}_G$$

$$\vec{a}_G=\vec{g}$$

ولدينا $\vec{a}_G=\frac{d\vec{V}_G}{dt}$

إذن المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة هي:

$$\frac{d\vec{V}_G}{dt}=\vec{g}$$

وبما أن $\vec{g}\begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix}$ فإن:

$$\begin{cases}\frac{dV_x}{dt}=g_x=0\\ \frac{dV_y}{dt}=g_y=0\\ \frac{dV_z}{dt}=g_z=-g\end{cases}$$

• إحداثيات متجهة السرعة:

$$\vec{V}\begin{cases}V_x=C_1=V_{ox}\\ V_y=C_2=V_{oy}\\ V_z=-gt+C_3=-gt+V_{oz}\end{cases}$$

حسب الشروط البدئية: $\vec{V_0}$ أفقية تنتمي للمحور ox.

نكتب إذن: $\vec{V_0}=V_0.\vec{i}$

إذن:

$$\vec{V_0}\begin{pmatrix}V_0\\0\\0\end{pmatrix}$$

وبالتالي:

$$\begin{cases}V_x=V_0\\ V_y=0\\ V_z=-gt\end{cases}$$


AFDEC



نستنتج من معادلات السرعة أن:

$$\begin{cases} x = V_0 t + x_0 \\ y = cte = y_0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0 \end{cases}$$

وبما أن $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,H)$ فإن:

$$\begin{cases} x = V_0 t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + H \end{cases}$$

2– معادلة المسار:

لديناّ: $t = \frac{x}{V_0}$

إذن: $z = -\frac{g}{2V_0^2}.x^2 + H$

3– مرور الكرة بالشباك:

عند مرور الكرة من المستوى الرأسي للشباك يكون أفصولها x هو: $x=d=12m$ وارتفاعها z هو:

$$z = \frac{-g}{2V_0^2}.d^2 + H$$

$$z = \frac{-9,8}{2.20^2}.12^2 + 2,4 = -1,764 + 2,4$$

$$z = 0,636m$$

$$z \leq h = 0,90m$$

يتبين من خلال هذه النتيجة أن الكرة تصطدم بالشباك.

4– تعبير السرعة V_{0min}:

لتفادي اصطدام الكرة بالشباك يجب أن يتحقق الشرط التالي: $z \geq h$

يعني: $-\frac{g}{2.V_0^2}.d^2 + H \geq h$

أو: $H - h \geq \frac{gd^2}{2V_0^2}$

$$2V_0^2(H-h) \geq gd^2$$

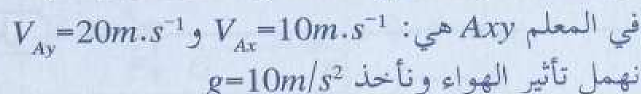
$$V_0^2 \geq \frac{gd^2}{2(H-h)}$$

ومنه: $V_0 \geq d\sqrt{\frac{g}{2(H-h)}}$

نضع: $V_{0min} = d\sqrt{\frac{g}{2(H-h)}}$

ت.ع: $V_{0min} = 12\sqrt{\frac{9,8}{2(2,4-0,9)}} = 12.1,807$

$V_{0min}=21,68m/s$



تمرين 5

من نقطة A توجد على حافة علوها $h=25m$ بالنسبة لسطح البحر، نقذف حصى كتلته m. بسرعة $\vec{V_A}$ إحداثياتها في المعلم Axy هي: $V_{Ax}=10m.s^{-1}$ و $V_{Ay}=20m.s^{-1}$

نهمل تأثير الهواء ونأخذ $g=10m/s^2$

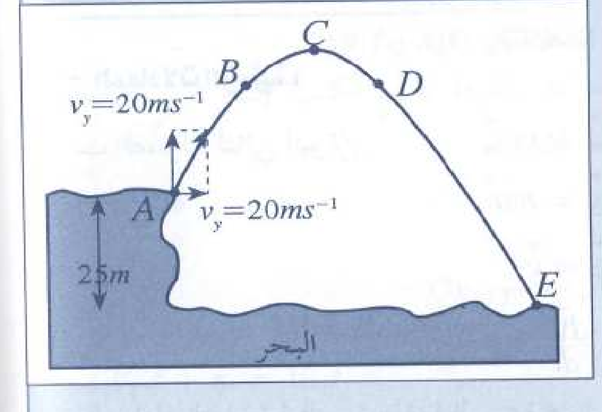
1– مثل متجهة التسارع $\vec{a}$ لحركة مركز قصور الحصى في كل من المواضع B و C و D.

2– أوجد بدلالة الزمن تعبير V_x و V_y

3– مثل بدلالة الزمن، دون استعمال سلم، تغيرات كل من V_x و V_y.

4– عين السرعة الدنوية V_{min} للحصى. في أي موضع يتحقق ذلك؟

5– أوجد معادلة المسار.



الحل

1– تمثيل $\vec{a}$:

يخضع الحصى لتأثير قوة واحدة هي وزنه.

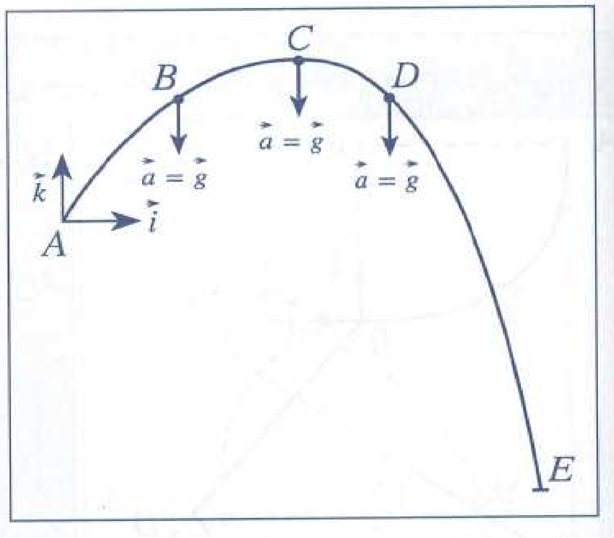
حسب القانون الثاني لنيوتن لدينا:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G = m\vec{a}$$

يعني: $\vec{P} = m\vec{a}$

ومنه: $\vec{a} = \vec{g}$





2- تعبير V_x و V_y:

لدينا: $\vec{a} = \vec{g}$

وباستعمال المعلم $(A, \vec{i}, \vec{j})$ لدينا:

$$\vec{g} = 0.\vec{i} - g.\vec{j}$$

إذن: $a_x.\vec{i} + a_y.\vec{j} = 0.\vec{i} - y\vec{j}$

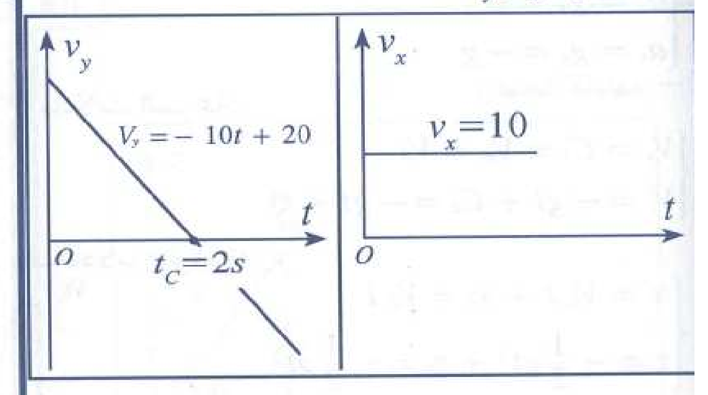
وبالتالي: $a_x=0$ و $a_y=-g$

وحسب الشروط البدئية لدينا: $V_x=10m/s$. إذن الحركة على المحور Ax مستقيمية منتظمة سرعتها ثابتة $V_x=10m/s$.

وعلى المحور oy: الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام تسارعها $a=-g$ وسرعتها البدئية: $V_{oy}=20m/s$.

$$V_y=a_y.t+V_{oy}=-10t+20$$

3- تمثيل V_x و V_y:



4- تعيين V_{min} و V_{max}:

يعبر عن المنظم V لسرعة الحصى في كل لحظة بالعلاقة التالية: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

بما أن V_x ثابتة فإن تغير V ناتج عن تغير المركبة V_y، بحيث: تكون V دنوية عندما تكون $|V_y|$ دنوية:

$$|V_y|_{min} = 0$$

إذن: $V_{min}=V_x=20m/s$

تنعدم المركبة V_y عند وصول الحصى إلى قمة المسار C لأن متجهة السرعة في هذا الموضع تصير موازية لمحور الأفاصيل Ax.

5- معادلة المسار:

حسب معادلات السرعة نكتب:

$$x=V_x.t+x_0=10t+0 \quad (1)$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{oy}t + y_0$$

$$y=-5t^2+20.t+0 \quad (2)$$

من المعادلة (1) لدينا: $t = \frac{x}{10}$

إذن: $y = -5.\left(\frac{x}{10}\right)^2 + 20.\frac{x}{10}$

$$y = -\frac{5}{100}x^2 + 2x$$

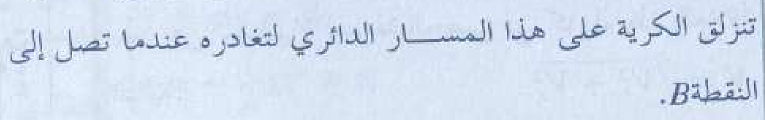
$$y = -\frac{1}{20}x^2 + 2x$$



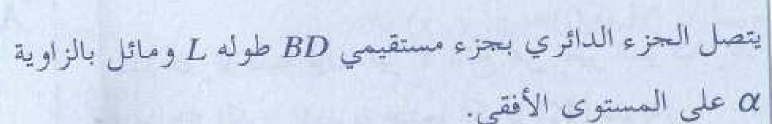
حركة قذيفة في مجال الثقالة

تمرين 6

نحرر بدون سرعة بدئية كرية نعتبرها نقطية من موضع A على مسار دائري $\overset{\frown}{AB}$ يوجد في مستوى رأسي.



تنزلق الكرية على هذا المســـار الدائري لتغادره عندما تصل إلى النقطة B.



يتصل الجزء الدائري بجزء مستقيمي BD طوله L ومائل بالزاوية α على المستوى الأفقي.

نهمل الاحتكاكات ونأخذ $g=10m/s^2$

نعطي $AC=BC=1,25m$ ؛ $L=BD=5m$ و $\alpha = 30°$

1- بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية، احســـب السرعة V_B للكرية لحظة مرورها من B.

2- حدد اتجاه ومنحى المتجهة $\vec{V}_B$.

3- أوجد معادلة مسار الكرية في المعلم $(B,\vec{i},\vec{k})$

نختار كأصل للتواريخ لحظة مرور الكرية من الموضع B

4- حدد إحداثيات موضع سقوط الكرية على السطح BD

الحـل

1- حساب V_B:

تخضع الكرية أثناء انزلاقها على السكة الدائرية AB لتأثير قوتين: وزنها وقوة السطح AB.

حسب مبرهنة الطاقة الحركية نكتب:

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{R})$$
$$= mgr + 0$$

ولدينا $V_A=0$

إذن:
$$V_B^2 = 2gr$$

ومنه:
$$V_B = \sqrt{2gr}$$

ت.ع:
$$V_B = \sqrt{2.10.1,25} = 5m/s$$

2- اتجاه ومنحى $\vec{V}_B$:

$\vec{V}_B$ مماسة للقوس $\overset{\frown}{AB}$ عند النقطة B، يعني عمودية على الشعاع BC، إذن $\vec{V}_B$ أفقية.

3- معادلة المسار:

ندرس حركة الكرية باعتبارها نقطية في مجال الثقالة بعد مغادرتها النقطة B.

حسب القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G = m\vec{a}$$
$$\vec{P} = m\vec{a}$$

إذن:
$$\vec{a} = \vec{g}$$

لدينا باستعمال المعلم $(B,\vec{i},\vec{k})$:

$$\begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{cases}$$

معادلات السرعة:

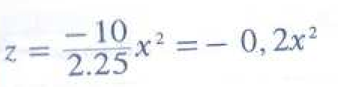
$$\begin{cases} V_x = C_1 = V_{x0} = V_B \\ V_z = -gt + C_2 = -gt + 0 \end{cases}$$

المعادلات الزمنية:

$$\begin{cases} x = V_B.t + x_0 = V_B.t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0 = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

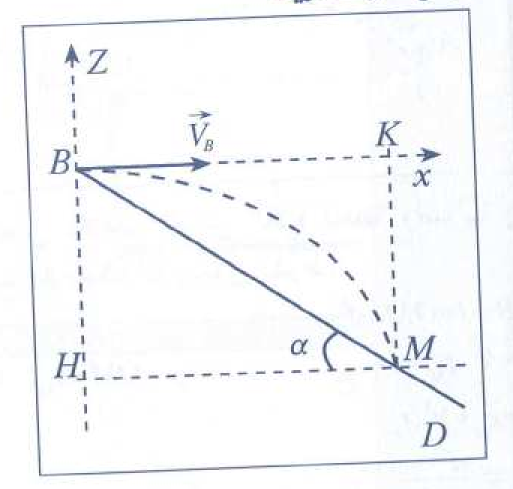
معادلة المسار:
$$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_B}\right)^2 = -\frac{g}{2V_B^2}x^2$$





ت.ع: $z = \frac{-10}{2.25}x^2 = -0,2x^2$

4– موضع سقوط الكرية:



لتكن M النقطة التي تصطدم عندها الكرية بالمستوى BD.

النقطة M تحقق معادلة المسار.

إذن: $(1)\ z=-0,2x^2$

ولدينا من خلال الشكل: $\tan\alpha = \frac{BH}{BK} = \frac{-z}{x}$

إذن: $(2)\ z = -x\tan\alpha$

وبالرجوع إلى المعادلة (1) نكتب:

$-x\tan\alpha = -0,2x^2$

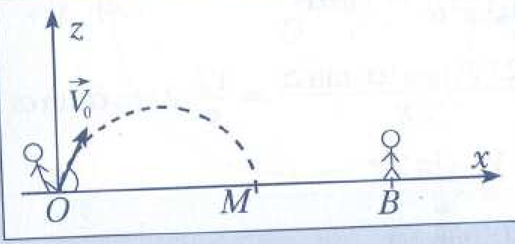
بما أن $x_M \neq 0$ فإن: $-\tan\alpha = -0,2x$

$x_M = \frac{\tan\alpha}{0,2} = 2,88m$

$z = z_M = -0,2(2,88)^2 \simeq -1,66m$

تمرين 7

خلال مباراة لكرة القدم، قذف لاعب A الكرة برجله من نقطة O على سطح أرضية الملعب في اتجاه زميله B في الفريق والذي يبعد عنه بالمسافة $d=25m$، حيث أعطى للكرة سرعة بدئية منظمها $V_0=15m/s$ ومتجهتها $\vec{V_0}$ مائلة بالزاوية $\alpha = 20°$.



بالنسبة للمستقيم Ox الذي يحدد اتجاه اللاعب B (انظر الشكل).

1– أوجد في المستوى xoz معادلة مسار الكرة التي نعتبرها نقطة.

نأخذ كأصل للتواريخ لحظة انطلاق الكرة من O.

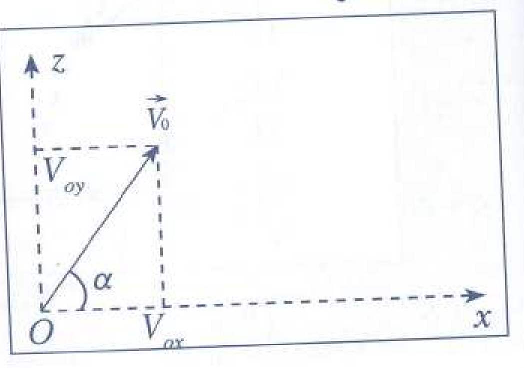
2– عين إحداثيات الكرة لحظة وصولها إلى سطح الأرض عند الموضع M.

3– أوجد السرعة V' التي يجب أن يتحرك بها اللاعب B لكي يلحق بالكرة لحظة وصولها إلى سطح الأرض.

نعطي: $g=9,8m/s^2$ ونهمل الاحتكاكات.

الحل

1– معادلة المسار:



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في المعلم الأرضي المرتبط بأرضية الملعب والذي نعتبره غاليليا، نكتب:

$\sum\vec{F} = m.\vec{a_G}$

$\vec{P} = m.\vec{a_G}$

ومنه: $\vec{a_G} = \vec{g}$

نكتب إذن: $\vec{a_G} = \vec{a} = -g.\vec{k}$

ومنه: $a_x=0$ ، $a_y=0$ ، $a_z=-g$

نستنتج إذن: $V_z = -gt + V_{0z} = -gt + V_0\sin\alpha$



$V_y=cte=V_{OY}$; $V_x = V_0 . \cos\alpha$

(1) $x = V_0\cos\alpha t + x_0 = V_0\cos\alpha$

(2) $y = y_0 = 0$

(3) $z = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0\sin\alpha t + 0$

نستنتج من (1) و(3) معادلة المسار:

$$z = -\frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha.x$$

2– إحداثيات M:

تحقق النقطة M معادلة الشلجم و$y_M=0$

إذن: $0 = -\frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha.x$

يعني: $\frac{gx^2}{2.V_0^2.\cos^2\alpha} = \tan\alpha.x$

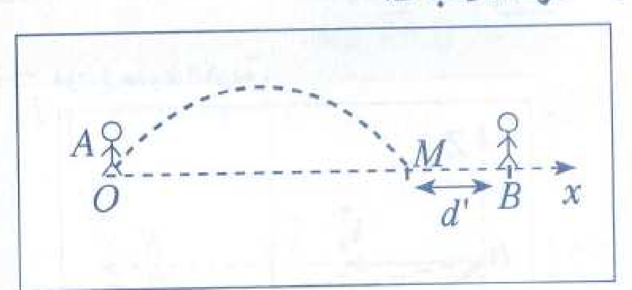
$x \neq 0$.إذن: $\frac{g.x}{2.V_0^2.\cos^2\alpha} = \tan\alpha$

$$x = \frac{2.V_0^2.\cos^2\alpha.\tan\alpha}{g} = \frac{V_0^2}{g}.2\cos\alpha\sin\alpha$$

$$x_M = \frac{V_0^2.\sin 2\alpha}{g}$$

ت.ع: $x_M = \frac{15^2\sin 40}{9,8} \simeq 14,75m$

3– سرعة اللاعب B:



لكي يصل اللاعب B إلى الكرة لحظة وصولها إلى الموضع M يجب أن يتحقق الشرط:

$OB=d=OM+d'$

حيث: $OM=x_M$ و $d'=V'.t_M$

إذن: $d=x_M+V'.t_M$

ومنه: $V' = \frac{d - x_M}{t_M}$

ولدينا حسب السؤال (1): $x = V_0\cos\alpha t$

ومنه: $t_M = \frac{x_M}{V_0\cos\alpha}$

وبالتالي: $V' = \frac{d - x_M}{x_M / V_0.\cos\alpha}$

$$V' = \frac{(d - x_M)V_0.\cos\alpha}{x_M}$$

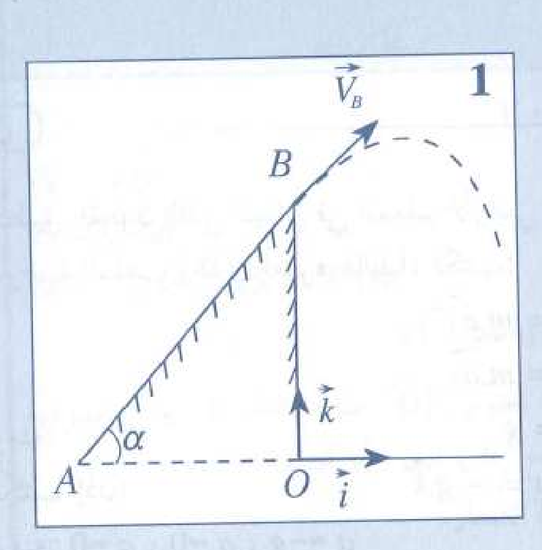
$$V' = \left(\frac{d}{x_M} - 1\right)V_0.\cos\alpha$$

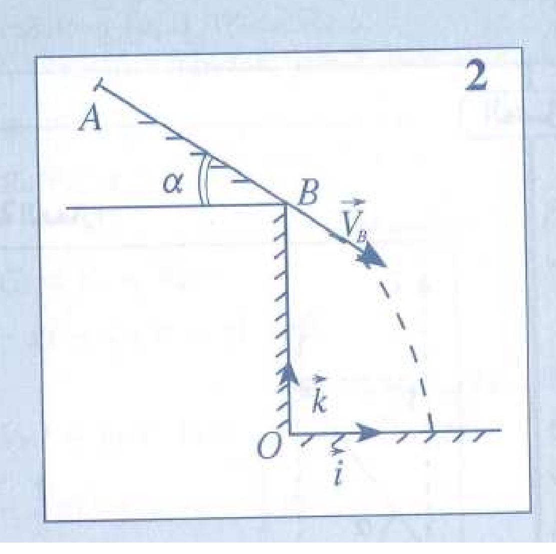
ت.ع: $V' = \left(\frac{25}{14,75} - 1\right).15.\cos 20$

$V' \simeq 9,79m/s = 35,24Km/h$

تمرين 8

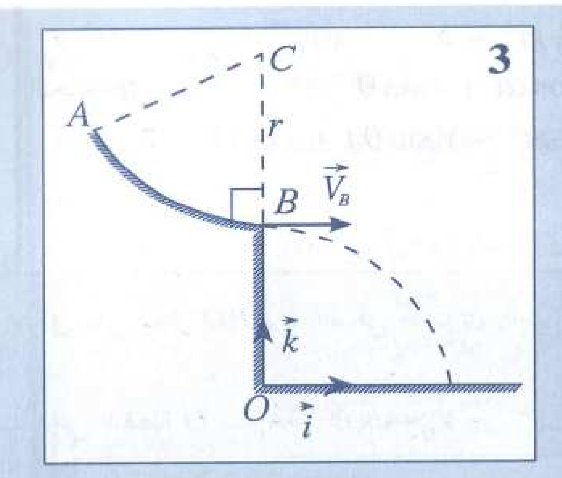
يمكن لجسم نقطي (S) كتلته m أن يتحرك على مسار AB، ويأخذ ابتداء من النقطة B، عند اللحظة $t=0$، حركة سقوط حر، شلجمية في المستوى الرأسي $(o,\vec{i},\vec{k})$، وذلك في كل من الحالات التالية:

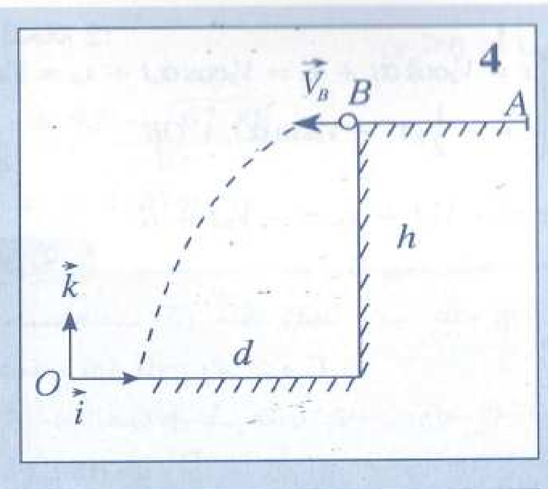


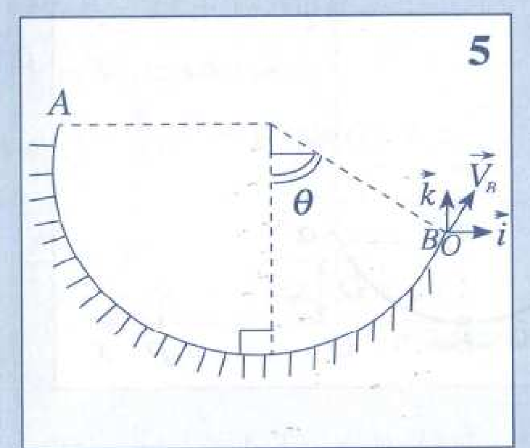


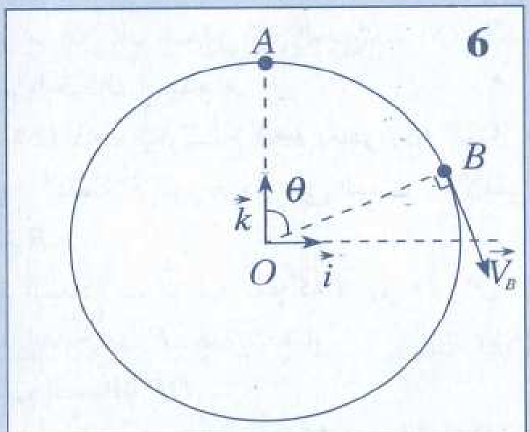


حركة قذيفة في مجال الثقالة









1– حدد مستعملاً المعلم $(O,\vec{i},\vec{k})$ الشروط البدئية للحركة الموافقة لكل من الحالات السابقة.

2– أوجد بالنسبة للحالات 2 و4 و6 تعبير الدالتين الزمنيتين $x=f(t)$ و$z=g(t)$ بدلالة المعطيات المناسبة.

الحل

1– الشروط البدئية:

الحالة 1: $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ z_0 = OB \end{pmatrix}$ $\quad \vec{V}_0 = \vec{V}_B \begin{cases} V_B\cos\alpha \\ V_B\sin\alpha \end{cases}$

الحالة 2: $\overrightarrow{OB}\begin{cases} 0 \\ OB \end{cases}$ $\quad \vec{V}_B \begin{cases} V_B\cos\alpha \\ -V_B\sin\alpha \end{cases}$

الحالة 3: $\overrightarrow{OB}\begin{cases} 0 \\ r \end{cases}$ $\quad \vec{V}_B \begin{cases} V_B \\ 0 \end{cases}$

الحالة 4: $\overrightarrow{OB}\begin{cases} d \\ h \end{cases}$ $\quad \vec{V}_B \begin{cases} -V_B \\ 0 \end{cases}$

الحالة 5: $\overrightarrow{OB}\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$ $\quad \vec{V}_B \begin{cases} V_B\cos\theta \\ V_B\sin\theta \end{cases}$

الحالة 6: $\overrightarrow{OB}\begin{cases} r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{cases}$ $\quad \vec{V}_B \begin{cases} V_B\cos\theta \\ -V_B\sin\theta \end{cases}$

2– معادلة المسار:

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في معلم غاليلي:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a_G}$$

الجسم نقطي وخاضع لتأثير وزنه $\vec{P} = m\vec{a}$

إذن: $m.\vec{g} = m.\vec{a}$

ومنه: $\vec{a} = \vec{g}$

باعتبار المعلم $O,\vec{i},\vec{k}$: $a_x=g_x=0$

$V_z=-g$

إذن: $\begin{cases} V_x = C_1 = V_{ox} = V_{Bx} \\ V_z = -gt + V_{By} \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} x = V_{Bx}t + x_B \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{Bz}.t + z_B \end{cases}$



بالنسبة للحالة 2:

$$\begin{cases} x = V_B\cos\alpha t + x_0 = V_B\cos\alpha.t + x_B = V_0\cos\alpha.t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 - V_B\sin\alpha.t + OB \end{cases}$$

الحالة 4:

$$x = -V_B t + x_B = -V_B t + d$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

الحالة 6:

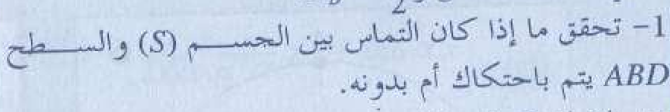
$$x = V_B\cos\alpha t + r\sin\theta$$
$$z = -\frac{1}{2}gt^2 - V_B\sin\theta.t + r\cos\theta$$

تمرين 9

يمكن لجسم صلب (S) نماثله بنقطة مادية كتلته m أن ينزلق على مدار ABD يوجد في مستوى رأسي وله شكل دائري شعاعه $r=0{,}5m$ ومركزه C.

نرسل (S) من النقطة A بسرعة بدئية $V_A=4m.s^{-1}$ فيصل إلى النقطة D بسرعة $V_D=4m.s^{-1}$

نعطي: $g=10m.s^{-2}$ و $Z_D=\frac{r}{2}$.



1- تحقق ما إذا كان التماس بين الجسم (S) والسطح ABD يتم باحتكاك أم بدونه.

عند النقطة D ذات التاريخ $t=0$ يغادر (S) المدار ABD ليسقط عند النقطة P الموجودة على المستوى الأفقي المار من النقطة B.

2- أوجد المعادلات الزمنية لحركة S بين D و P.

3- أوجد إحداثيات F: قمة المسار.

4- احسب المسافة OP.

5- أوجد بطريقتين قيمة السرعة V_P عند النقطة P.

6- حدد اتجاه $\vec{V}_P$



1- طبيعة التماس:

باستعمال مبرهنة الطاقة الحركية لدينا:

$$\underset{A\to D}{\Delta E_C} = \underset{A\to D}{W(\vec{P})} + \underset{A\to D}{W(\vec{R})}$$

وبما أن: $V_D=V_A$ فإن:

$$\Delta E_C = 0$$

وبالتالي:

$$W(\vec{R}) + W(\vec{P}) = 0$$

ومنه:

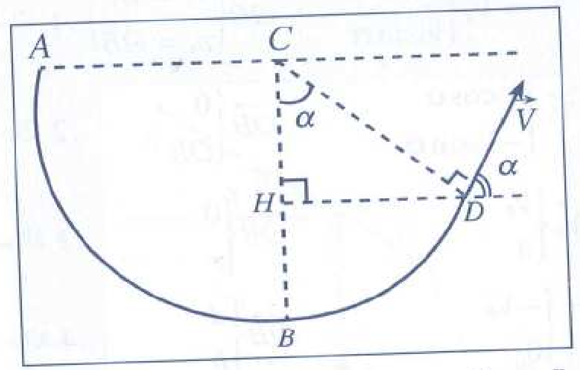
$$W(\vec{R}) = -W(\vec{P})$$
$$\underset{A\to D}{W(\vec{P})} = mg(Z_A - Z_D)$$
$$= mg\left(r-\frac{r}{2}\right) = mg.\frac{r}{2}$$
$$W(\vec{R}) = -mg.\frac{r}{2} < 0$$

القوة $\vec{R}$ غير عمودية على سطح التماس ABD، وبالتالي فإن التماس يتم باحتكاك.

2- المعادلات الزمنية:

- لنعين إحداثيات $\vec{V}_D$

لدينا من الشكل:



$$\cos\alpha = \frac{HC}{CD} = \frac{CB-HB}{CD} = \frac{r-\frac{r}{2}}{r} = \frac{\frac{r}{2}}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}rad$$



إذن: $\vec{V_D}\begin{cases} V_D.\cos\alpha = 2m/s \\ V_D\sin\alpha = 3,46m/s \end{cases}$

– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن لدينا: $\vec{P} = m\vec{a}$

ومنه: $\vec{a} = \vec{g}$

– باستعمال المستوى الرأسي xOz:

$a_x=g_x=0$ و $a_z=g_z=-g$

إذن: $V_x=cte$ و $a_z=-gt+cte$

– بالرجوع إلى الشروط البدئية:

$$\begin{cases} V_x = V_D.\cos\alpha \\ V_y = -gt + V_D.\sin\alpha \end{cases}$$

ومنه:

$$x = V_D.\cos\alpha.t + x_D$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_D.\sin\alpha.t + z_D$$

ت.ع:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -5t^2 + 3,46t + 0,25 \end{cases}$$

3– إحداثيات النقطة F:

معادلة المسار:

$$z = -\frac{5}{4}x^2 + 1,73x + 0,25$$

لدينا عند القمة F للشلجم: $\frac{dz}{dx} = 0$

يعني: $-\frac{5}{2}x + 1,73 = 0$

إذن: $\frac{5}{2}x = 1,73$

$$x_F = \frac{2}{5}.1,73 = 0,69m \simeq 69cm$$

$$z_F = -\frac{5}{4}x_F^2 + 1,73.x_F + 0,25$$

$$z_F \simeq 0,848m = 84,8cm$$

4– حساب المسافة OP:

لدينا: $z_P=0$ و P تحقق معادلة المسار.

إذن:

$$-\frac{5}{4}x^2 + 1,73.x + 0,25 = 0$$

$$-5x^2 + 6,92x + 1 = 0$$

$$\Delta = 47,88 - 4(-5.1) = 67,88$$

وبما أن $x_P>0$:

$$x_P = -\frac{6,92 - \sqrt{67,88}}{-10}$$

$$OP = x_P \simeq 1,51m$$

5– تحديد السرعة V_P:

الطريقة الأولى:

استعمال دراسة طاقية: مبرهنة الطاقة الحركية أو انحفاظ الطاقة الميكانيكية.

$$\frac{1}{2}mV_P^2 - \frac{1}{2}mV_D^2 = W(\vec{P}) = mg(z_D - z_P)$$

$$V_P^2 - V_D^2 = 2g(\frac{r}{2} - 0)$$

$$V_P^2 = V_D^2 + 2g.\frac{r}{2} = V_D^2 + g.r$$

$$V_P = \sqrt{V_D^2 + g.r} = \sqrt{16 + 5} = \sqrt{21}$$

$$V_P = 4,58m/s$$

الطريقة الثانية: استعمال معادلات الحركة الشلجمية.

لدينا: $V = \sqrt{V_x^2 + V_z^2}$

حيث: $V_x = V_D.\cos\alpha = 5m/s$

$V_y = -gt + V_0\sin\alpha = -10t + 3,46$

عند النقطة P: لنحدد اللحظة t_P باستعمال المعادلة الزمنية $x=V_x.t$

ومنه: $t_P = \frac{x_P}{V_x}$

لدينا حسب السؤال 4: $x_P=1,51m$

$$t_P = \frac{1,51}{2} = 0,755s$$

$$\vec{V_P}\begin{cases} V_x = V_D.\cos\alpha = 2m/s \\ V_z = -10t_P + 3,46 \\ \quad = -10.0,755 + 3,46 \simeq -4,1m/s \end{cases}$$

$$V_P = \sqrt{V_x^2 + V_z^2}$$

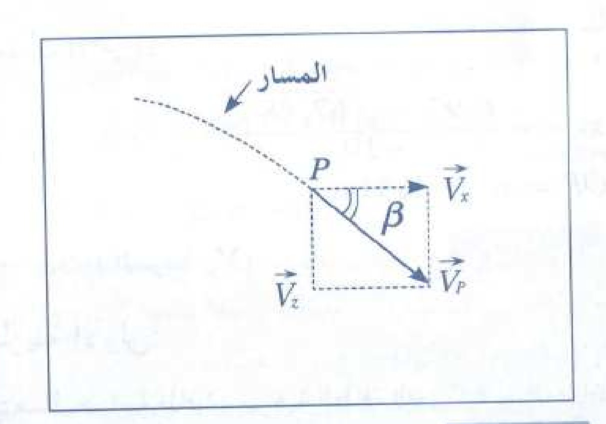
$$V_P = \sqrt{2^2 + (-4,09)^2}$$

$$V_P \simeq 4,56m/s$$

6– تحديد اتجاه $\vec{V_P}$:

تكون متجهة السرعة $\vec{V_P}$ مماسة للمسار الشلجمي عند الموضع P.





ويمكن تحديد اتجاهها باستعمال المركبتين $\vec{V}_x$ و $\vec{V}_z$.

$\vec{V}_P$ تُكَوِّن مع المحور الأفقي الزاوية β بحيث:

$$\tan\beta = \frac{\|\vec{V}_z\|}{\|\vec{V}_x\|} = \frac{|-gt_P + V_D\sin\alpha|}{V_D\cos\alpha}$$

ت.ع:

$$\tan\beta = \frac{|-4,1|}{2} = 2,05$$

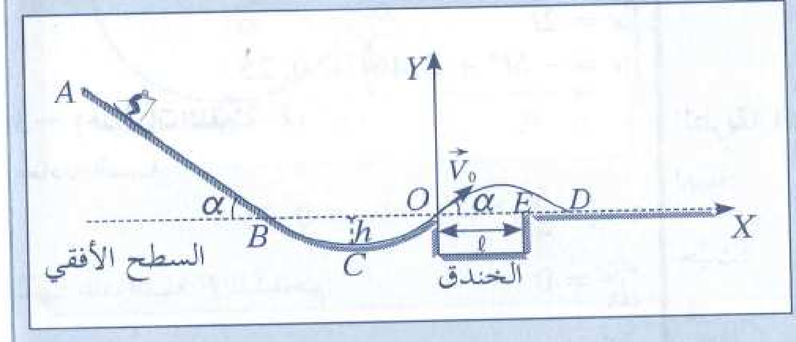
$$\beta = 64^\circ$$

تمرين 10



عند ممارسة التزحلق على الجليد انطلق متزلج بدون سرعة بدئية عند لحظة $t=0$ من الموضع A لمدار ABO يوجد في مستوى رأسي ويتكون من:

- جزء مستقيمي AB طوله $L=15m$ ويكون زاوية $\alpha = 20^\circ$ مع المستوى الأفقي
- جزء BO على شكل قوس من دائرة



يتم الاتصال مماسيا بين الجزئين AB وBO كما يوجد الموضعان B وO على نفس الخط الأفقي.

نعتبر كل الاحتكاكات مهملة ونماثل المتزلج مع معداته بنقطة مادية كتلتها $m=80kg$ ونأخذ $g=10ms^{-2}$.

1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد قيمة التسارع a للمتزلج على الجزء AB واستنتج طبيعة حركته.

2- يستغرق وصول المتزلج إلى B المدة $3s$. بين أن سرعة الجسم في الموضع B هي $V_B=10,2ms^{-1}$

3- بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية، احسب V_C سرعة المتزلج عند بلوغه النقطة C أدنى نقطة على الجزء الدائري. نعطي $h=4cm$.

4- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، حدد R_C شدة القوة $\vec{R}$ التي يطبقها الجزء BO من السطح على المتزلج عند الموضع C. نعطي $r=20,4m$ شعاع القوس BO.

5- بين أن $V_0=V_B$ مع V_0 سرعة المتزلج عند مروره بالموضع O.

6- في لحظة نعتبرها أصلا للزمن يدخل المتزلج في سقوط حر من O بالسرعة $\vec{V}_0$ وينزل على السطح الأفقي عند نقطة D. السطح الأفقي يحتوي على خندق عرضه $OE = \ell = 5m$.

1.6- أوجد المعادلتين الزمنيتين $X(t)$ و$Y(t)$ واستنتج معادلة المسار لحركة G مركز قصور المجموعة {المتزلج-معداته}.

2.6- أوجد المسافة OD، استنتج معللا جوابك هل يتجاوز المتزلج الخندق أم لا.



الحــل

1.1- طبيعة الحركة:

1- تحديد التسارع a:

يخضع المتزلج خلال حركته على المستوى المائل AB لتأثير قوتين:

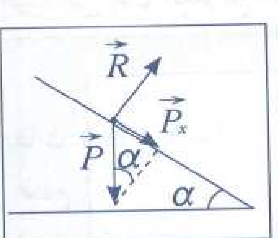
$\vec{P}$: وزنه

$\vec{R}$: تأثير السطح AB بحيث $\vec{R}$ عمودية على AB.

حسب القانون الثاني لنيوتن:

$$\vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}_G = m\vec{a}$$

باستعمال الاسقاط على المحور Ax المطابق ل $\overrightarrow{AB}$:



$$P_x + R_x = m.a_x$$
$$P.\sin\alpha + 0 = m.a_x$$
$$a_x = \frac{P\sin\alpha}{m} = g\sin\alpha$$
$$a = a_x = g\sin\alpha$$
$$a = a_x = 10.\sin 20$$
$$a = a_x = 3,4m.s^{-2}$$

استنتاج:

الحركة مستقيمية و$a_x = cte > 0$ إذن الحركة على AB مستقيمية متسارعة بانتظام.

2- تحديد السرعة V_B:

لدينا المعادلة: $V = a.t + V_0$

حيث $V_0 = V_A = 0$

عند وصوله إلى B نكتب: $V_B = a.t_B$

ت ع: $V_B = a.t_B = 3,4.3$

$= 10,2s$

3- حساب V_C:

باستعمال مبرهنة الطاقة الحركية بين B و C نكتب:

$$\Delta E_{C\,B\to C} = \sum W(\vec{F})_{B\to C}$$
$$\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}V_B^2 = w(\vec{P})_{B\to C} + w(\vec{R})_{B\to C}$$
$$\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = mgh + 0$$
$$V_C^2 - V_B^2 = 2gh$$
$$V_C = \sqrt{2gh + V_C^2}$$

ت ع: $V_C = \sqrt{2.10.4 + (10,2)^2}$

$V_C = 13,56m/s$

4- تحديد الشدة R_C:

نستعمل القانون الثاني لنيوتن ونكتب:

$$\vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}_G = m.\vec{a}$$

لدينا عند النقطة C:

$$\vec{P} + \vec{R}_C = m.\vec{a}_C$$

$\vec{R}_C$ عمودية على BC لأن الاحتكاك مهمل، يعني أنها مطابقة للمنظمي.

نستعمل معلم فريني ونسقط هذه العلاقة على المنظمي فنكتب:

$$-P + R_C = m(a_n)_C$$
$$-mg + R_C = m.\left(\frac{V^2}{r}\right)_C$$
$$R_C = \frac{mV_C^2}{r} + mg$$
$$R_C = m\left[\frac{V_C^2}{r} + g\right]$$

ت ع: $R_C = 80\left(\frac{(10.2)^2}{20,4} + 10\right)$

$R_C = 1208N$

5- التحقق أن $V_B = V_0$:

نستعمل مبرهنة الطاقة الحركية بين B و O:

$$\frac{1}{2}mV_O^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = w(\vec{P}) + w(\vec{R})$$

لدينا $w(\vec{R}) = 0$ لأن الاحتكاكات مهملة بين B و O

و $w(\vec{P}) = 0$ لأن O و B في نفس المستوى الأفقي.

إذن: $\frac{1}{2}mV_O^2 = \frac{1}{2}mV_B^2$

يعني: $V_0 = V_B = 10,2m/s$

1.6- المعادلتان الزمنيتان:

بعد مغادرة النقطة O يكون المتزلج في حركة سقوط حر.

لدينا حسب القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum\vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}_G = m\vec{a}$$

إذن: $\vec{a} = \vec{g}$

- باستعمال المحور ox: $a_x = g_x = 0$

إذن: $V_x = cte = V_{ox} = V_0.\cos\alpha$

ومنه: $x = V_0.\cos\alpha.t + x_0 = V_0.\cos\alpha t \quad (1)$

$x = 10,2\cos 20.t = 9,58.t$



– وباستعمال المحور oy:

$a_y = g_y = -g$

إذن: $V_y = -gt + V_{oy} = -gt + V_0.\sin\alpha$

$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0\sin\alpha t + y_0$

ومنه:

$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0\sin\alpha t$

$y = -5t^2 + 3,48t \qquad (2)$

من (1):

$t = \frac{x}{V_0\cos\alpha}$

وبالتعويض في (2):

$y = -5.\frac{x^2}{V_0^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha.x$

$y = -0,054x^2 + 0,36x$

2.6– تحديد المسافة OD:

أرتوب النقطة D هو $y_D=0$ وأفصولها هو x_D

النقطة D تحقق معادلة المسار، إذن:

$y_D = O = -0,054x_D^2 + 0,36x_D$

يعني:

$0,054.x_D^2 = 0,36.x_D$

لدينا: $x_D \neq 0$ إذن:

$0,054x_D = 0,36$

$OD = x_D = \frac{0,36}{0,054} = 6,66m$

نلاحظ أن المسافة OD أكبر من طول الخندق

$OE = \ell = 5m$

سيتمكن إذن المتزلج من اجتياز الخندق.

تمرين II

الرياضات الشتوية

يعتبر سباق السرعة على الجليد من بين أعرق وأهم مسابقات الألعاب الأولمبية الشتوية؛ حيث يطمح كل متسابق إلى قطع مسافة النزول خلال أقل مدة زمنية ممكنة.

يهدف هذا التمرين إلى تحديد بعض المقادير الحركية والتحريكية المميزة لحركة متسابق.

ينزلق متسابق كتلته m ومركز قصوره G، فوق منحدر نعتبره مستقيميا ويكون زاوية α مع المستوى الأفقي.

لدراسة حركة G نختار معلما $(A,\vec{i})$ (الشكل 1).

معطيات: $g=10m.s^{-2}$ ؛ $m=80kg$ ؛ $\alpha = 30°$.

الشكل 1

الشكل 2

1– دراسة حركة المتسابق على المنحدر:

ينطلق المتسابق عند اللحظة $t=0$، حيث يحتل مركز قصوره G الموضع A، ويتابع حركته وفق مسار مستقيمي AB يخضع خلاله لاحتكاكات ننمذجها بقوة $\vec{f}$ ثابتة، اتجاهها موازي للمسار ومنحاها معاكس لمنحى الحركة.

1.1– بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، أثبت المعادلة التفاضلية التي يحققها V_x إحداثي متجهة سرعة $\vec{V_G}$ G.

2.1– يمثل الشكل 2 مخطط سرعة مركز قصور المتسابق. حدد قيمة التسارع a_G للحركة.

3.1– استنتج شدة القوة $\vec{f}$.

4.1– اكتب المعادلة الزمنية $x(t)$ لحركة G.

5.1– يمر G مركز قصور المتسابق من الموضع B بالسرعة $V_B=28m.s^{-1}$. حدد قيمة المسافة AB.

2– دراسة حركة المتسابق في مجال الثقالة المنتظم:

صادف المتسابق عند نهاية المرحلة AB حافة، فغادر مركز قصوره G الموضع B بالسرعة $\vec{V_B}$، عند لحظة نعتبرها أصلا جديدا للتواريخ $t=0$، وأصبح المتسابق في سقوط نعتبره حرا. لدراسة حركة G، نختار معلما متعامدا

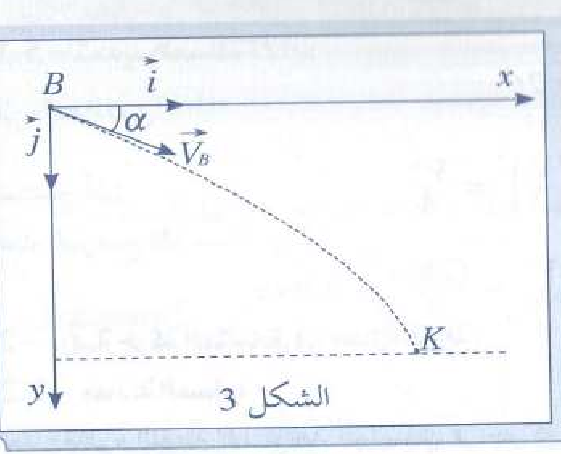


ومنظما $(B,\vec{i},\vec{j})$ (الشكل 3).

2.1- أثبت أن معادلة مسار حركة G في المعلم $(B,\vec{i},\vec{j})$، تكتب: $y = \frac{g}{2.V_B^2.\cos^2\alpha}.x^2 + x.\tan\alpha$

2.2- يمر G من الموضع K عند اللحظة t=0,2s بالسرعة V_K. حدد قيمة V_K.

عن الامتحان الوطني الموحد دورة يونيو 2010 مسلك علوم الحياة والأرض



الحل

1- دراسة حركة المتسابق على المنحدر:

1.1- إثبات المعادلة التفاضلية:

يخضع المتسابق على المستوى المائل AB لتأثير قوتين:

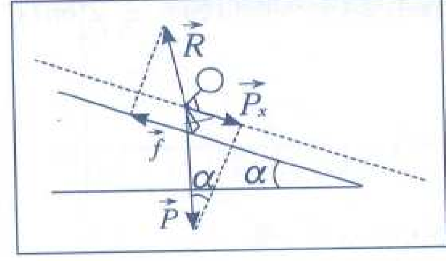
وزنه $\vec{P}$ والقوة $\vec{R}$ المسلطة عليه من طرف المستوى المائل AB.

حسب القانون الثاني لنيوتن في معلم أرضي نعتبره غاليلياً نكتب:

$\vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}_H$

بالإسقاط على المحور $x'x$ لدينا:

$P_x + R_x = m.a_x = m.\frac{dV_x}{dt}$



وبالرجوع إلى الشكل لدينا:

$P_x = mg\sin\alpha$ و $R_x=-f$

إذن: $mg\sin\alpha - f = m.\frac{dV_x}{dt}$

يعني: $\frac{dV_x}{dt} = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$

إذن: $V_x=2t+c$

عند اللحظة t=0 تكون حسب الشروط البدئية سرعة المتسابق منعدمة.

إذن: $0=2.0+c$

أي إن: $c=0$

وبالتالي: $V_x=2t$

ونعلم أن: $V_x = \frac{dx}{dt}$

أي إن: $\frac{dx}{dt} = 2t$

ومنه: $x=t^2+c'$

عند اللحظة t=0 يكون موضع مركز المتسابق مطابق للأصل O للأفاصيل،

ومنه: $0=0+c'$

أي: $c'=0$

وبالتالي: $x=t^2$

2.1- تحديد a_G:

تتم الحركة على المحور Ox، نكتب إذن:

$V_x=V$ و $a_x=a_G$

نعلم أن: $a_G = \frac{dV}{dt}$

ولدينا: $V_G=f(t)$ دالة خطية.

إذن: a_G هي المعامل الموجه لمنحنى هذه الدالة.

مبيانياً: $a_G = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{2-0}{1-0} = 2m.s^{-2}$

3.1- استنتاج f:

من خلال العلاقة المحصل عليها في السؤال 1.1 نكتب:

$a_G = g\sin\alpha - \frac{f}{m}$

إذن: $\frac{f}{m} = g\sin\alpha - a_G$

أي إن: $f = m(g\sin\alpha - a_G)$

ت.ع: $f = 80(10.\sin 30 - 2)$

$f = 240N$

4.1- كتابة المعادلة الزمنية:

لدينا: $\frac{dV_x}{dt} = a_x = 2m.s^{-2}$



5.1- تحديد المسافة AB:

من المعادلتين:
$$\begin{cases} V = 2t \\ x = t^2 \end{cases}$$

نستنتج أن:
$$x = \left(\frac{V}{2}\right)^2 = \frac{V^2}{4}$$

عند الموضع B:
$$x_B = \frac{V_B^2}{4} = \frac{(28)^2}{4} = 196m$$

2- دراسة حركة المتسابق في مجال الثقالة:

1.2- معادلة المسار:

بعد مغادرة النقطة B، يوجد المتسابق فر حركة سقوط حر حيث يكون خاضعاً لتأثير وزنه فقط.

حسب القانون الثاني لنيوتن، نكتب:
$$\vec{P} = m.\vec{a}_G$$

أي إن:
$$m\vec{a}_G = m\vec{g}$$

يعني:
$$\vec{a}_G = \vec{g}$$

باستعمال المحور $(B, \vec{i}, \vec{j})$:
$$\begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = g \end{cases}$$

باستعمال العلاقتين: $a_x = \frac{dV_x}{dt}$ و $a_y = \frac{dV_y}{dt}$

يكون لدينا: $\frac{dV_x}{dt} = 0$ و $\frac{dV_y}{dt} = g$

ومنه نستنتج:
$$\begin{cases} V_x = C_1 \\ V_y = gt + C_2 \end{cases}$$

وباستعمال الشروط البدئية حيث:
$$\vec{V}_B \begin{cases} V_{Ox} = V_B.\cos\alpha \\ V_{Oy} = V_B.\sin\alpha \end{cases}$$

نستنتج أن:
$$\begin{cases} V_x = V_B.\cos\alpha \\ V_y = gt + V_B.\sin\alpha \end{cases}$$

وباستعمال العلاقتين: $V_x = \frac{dx}{dt}$ و $V_y = \frac{dV_y}{dt}$ نكتب:
$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} x = V_B.\cos\alpha.t + x_0 \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + V_B.\sin\alpha + y_0 \end{cases}$$

حيث: $x_0=0$ و y_0.

من المعادلة (1):
$$t = \frac{x}{V_B.\cos\alpha}$$

وبالتعويض في (2) نجد:
$$y = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_B.\cos\alpha}\right)^2 + V_B.\sin\alpha.\frac{x}{V_B.\sin\alpha}$$

يعني:
$$y = \frac{g}{2.V_B^2.\cos^2\alpha}.x^2 + \tan\alpha.x$$

2.2- تحديد V_K:

معادلتا السرعة هي:
$$\vec{V} \begin{cases} V_x = V_B.\cos\alpha \\ V_y = gt + V_B\sin\alpha \end{cases}$$

عند المرور من النقطة K لدينا:
$$V_K \begin{cases} V_x = 28.\cos 30 = 24,248m/s \\ V_y = 10.0,2 + 28.\sin 30 = 16m/s \end{cases}$$

$$V_K = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$V_K = \sqrt{(24,248)^2 + (16)^2} \simeq 29m/s$$